Ueber die

Bewegung eines von zwei festen Punkten angezogenen Punktes.

Inaugural - Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

in der

Philosophie,

vorgelegt der philosophischen Facultät

der

Friedrich - Franz - Universität

zu Rostock

im April 1869

von

Bruno Theodor Hülsen

aus Milow.

Berlin, 1869.

Buchdruckerei von A. W. Schade (L. Schade).

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41553622_0095

Ueber die Bewegung eines Punktes,

der von zwei festen Punkten, die mit ihm in gerader Linie liegen, mit einer Kraft angezogen wird, welche umgekehrt proportional der dritten Potenz der Entfernung wirkt.

§. 1.

Wenn ein beweglicher Massenpunkt H, der von zwei mit ihm in gerader Linie liegenden festen Massenpunkten A und B nach einem beliebigen Attractionsgesetz angezogen wird, zu irgend einer Zeit im Mittelpunkt der Strecke AB mit der Geschwindigkeit 0 ankommt, so mufs er in demselben liegen bleiben, da er dann von A und B gleich stark, aber in entgegengesetztem Sinne angezogen wird. Wir wollen daher annehmen, dafs der bewegliche Massenpunkt H in diesem Punkte, von dem aus die Abscissen gerechnet werden mögen, stets eine Geschwindigkeit C habe, und zwar sei, wenn a und $-a$ die Entfernungen der Punkte A und B vom Anfangspunkt sind, $C = \frac{c}{a}$. Ferner wollen wir die Bewegung nur für den Fall betrachten, dafs die Anziehung umgekehrt proportional der dritten Potenz der Entfernung stattfindet, und da nun A und B in verschiedenem Sinne auf H anziehend wirken, so hat man für seine Bewegung die Gleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{(a-x)^3} - \frac{1}{(a+x)^3}$$

multiplicirt man dieselbe mit $2 \cdot \frac{dx}{dt}$, so erhält man als erstes Integral

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{(a-x)^2} + \frac{1}{(a+x)^2} + C$$

da für $x = 0$ aber $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{c^2}{a^2}$ sein soll, so ist $C = \frac{c^2-2}{a^2}$

also allgemein

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{(a-x)^2} + \frac{1}{(a+x)^2} + \frac{c^2-2}{a^2}$$

und man erhält

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{a^4 c^2 + 2a^2 x^2 (3 - c^2) + x^4 (c^2 - 2)}}{a(a^2 - x^2)} \qquad (1)$$

Die Geschwindigkeit des Punktes H wird also gleich 0, wenn die Function unter dem Wurzelzeichen verschwindet, und setzt man

$$x^4 - 2a^2 x^2 \cdot \frac{c^2 - 3}{c^2 - 2} + \frac{a^4 c^2}{c^2 - 2} = 0 \qquad (2)$$

so findet man als Wurzeln dieser Gleichung

$$x = \pm a \sqrt{\frac{c^2 - 3 \pm \sqrt{9 - 4c^2}}{c^2 - 2}}$$

Ist also $c^2 > \frac{9}{4}$, so verschwindet die Function unter dem Wurzelzeichen, und somit die Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$ für keinen reellen Werth von x, und da nun auf der geraden Linie, auf welcher der Punkt H stets bleiben muſs, nur reelle Werthe von x liegen, so läuft derselbe fortwährend in derselben Richtung weiter, ohne daſs seine Geschwindigkeit jemals 0 würde. Dasselbe findet statt, wenn $c^2 = \frac{9}{4}$ ist, da dann $x = \pm a\sqrt{-3}$ wird, also auch stets imaginär bleibt.

§. 2.

Ist $c^2 < \frac{9}{4}$, so wollen wir $c^2 = \frac{9}{4} - \varkappa^2$ setzen; dann wird

$$x = \pm a \sqrt{\frac{(-3 \pm 2\varkappa)(1 \mp 2\varkappa)}{(1 - 2\varkappa)(1 + 2\varkappa)}}$$

und man muſs nun unterscheiden, ob von $\varkappa$, das stets eine positive Zahl sein möge, das obere oder untere Zeichen genommen wird; ist dann

$$x_1 = \pm a \sqrt{\frac{-3 + 2\varkappa}{1 + 2\varkappa}}$$

so ist x_1 reel, wenn $\varkappa > \frac{3}{2}$, also $\varkappa^2 > \frac{9}{4}$ ist. Ist

$$x_2 = \pm a\sqrt{\frac{-3-2\varkappa}{1-2\varkappa}} = \pm a\sqrt{\frac{3+2\varkappa}{2\varkappa-1}}$$

so ist x_2 reell, wenn $\varkappa > \frac{1}{2}$, also $\varkappa^2 > \frac{1}{4}$ ist.

Wir müssen daher folgende Fälle unterscheiden:

1) Ist $\varkappa^2 < \frac{1}{4}$, dann sind alle Wurzeln der Gleichung §. 1 (2) imaginär, es verschwindet also $\frac{dx}{dt}$ für keinen reellen Werth von x, und der Punkt H läuft fortwährend in derselben Richtung weiter, ohne dafs seine Geschwindigkeit jemals 0 würde.

2) Ist $\varkappa^2 = \frac{1}{4}$, so ist $x_2 = \pm\infty$; dann wird aber $c^2 = 2$, und es fällt in der Gleichung für $\frac{dx}{dt}$ die vierte Potenz von x fort, so dafs dieselbe nur noch vom zweiten Grade ist.

3) Ist $\varkappa^2 > \frac{1}{4}$ aber $< \frac{9}{4}$, so hat die Gleichung für $\frac{dx}{dt}$ zwei reelle und zwei imaginäre Wurzeln.

4) Ist $\varkappa^2 = \frac{9}{4}$, so ist $c^2 = 0$, dann verschwindet also die Constante der Function unter dem Wurzelzeichen des §. 1 (1), und zwei Wurzeln derselben sind $= 0$, die beiden andern aber reell.

5) Ist $\varkappa^2 < \frac{9}{4}$, so sind alle vier Wurzeln reell.

Wir wollen nun die einzelnen Fälle genauer betrachten.

§. 3.

Unter den Fällen, in denen $\varkappa^2 < \frac{1}{4}$ ist, soll nur der Grenzfall, für den $\varkappa^2 = 0$, also $c^2 = \frac{9}{4}$ ist, einer nähern Betrachtung unterzogen werden; dann ist

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{\frac{9a^4}{4} + 2a^2x^2\left(3 - \frac{9}{4}\right) + x^4\left(\frac{9}{4} - 2\right)}}{a(a^2 - x^2)}$$

$$= \frac{3a^2 + x^2}{2a^3 - 2ax^2} \quad \text{also} \quad dt = \frac{2a^3 - 2ax^2}{3a^2 + x^2} \cdot dx$$

also integrirt

$$t = -2ax + \frac{8a^2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a\sqrt{3}} + C$$

Rechnet man nun die Zeit vom Punkt $x = 0$ an, so wird die Constante $C = 0$, also ist allgemein

$$t = -2ax + \frac{8a^2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a\sqrt{3}}$$

Beim Punkt A langt H daher nach der Zeit

$$t_a = -2a^2 + \frac{8a^2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2a^2\left(2\pi\sqrt{3} - 9\right)}{9}$$

an, und zwar mit der Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt} = \infty$, dann geht er aber über denselben hinaus, und läuft fortwährend in derselben Richtung weiter.

§. 4.

Ist $x^2 = \frac{1}{4}$, also $c^2 = 2$, dann ist nach §. 1 (1)

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{2a^4 + 2a^2x^2}}{a(a^2 - x^2)}, \quad \text{also} \quad dt = \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + x^2}} \cdot dx$$

Setzt man nun $\sqrt{a^2 + x^2} = y - x$, so wird

$$x = \frac{y^2 - a^2}{2y}, \quad \text{also} \quad a^2 - x^2 = -\frac{y^4 - 6a^2y^2 + a^4}{4y^2}$$

ferner $\sqrt{a^2 + x^2} = \frac{y^2 + a^2}{2y}$ und $dx = \frac{y^2 + a^2}{2y^2} \cdot dy$

also $$dt = -\frac{y^4 - 6a^2y^2 + a^4}{\sqrt{2} \cdot 4y^3} dy$$

und durch Integration

$$t = -\frac{y^2}{8\sqrt{2}} + \frac{3a^2}{2\sqrt{2}}\, l\, y + \frac{a^4}{8\sqrt{2}\,.\,y^2} + C$$

$$= -\frac{x}{2\sqrt{2}}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{3a^2}{2\sqrt{2}}\, l\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) + C$$

Rechnet man nun die Zeit vom Punkt $x = 0$ an, so ist $C = -\frac{3a^2}{2\sqrt{2}}\, l\, a$, also allgemein

$$t = -\frac{x}{2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{a^2+x^2} + \frac{3a^2}{2\sqrt{2}}\cdot l\left[\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a}\right]$$

Zum Punkt A gelangt H also nach der Zeit

$$t_a = -\frac{a^2}{2} + \frac{3a^2}{2\sqrt{2}}\, l\left(1+\sqrt{2}\right)$$

und zwar mit der Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt} = \infty$, dann aber überschreitet er diesen Punkt und geht in derselben Richtung weiter, bis er in der Unendlichkeit liegen bleibt.

§. 5.

Liegt $\varkappa^2$ zwischen $\frac{1}{4}$ und $\frac{9}{4}$, so wird die Geschwindigdigkeit für zwei reelle Werthe von x gleich 0, welche nach §. 2 in der Gleichung

$$x = \pm a\sqrt{\frac{3+2\varkappa}{2\varkappa-1}}$$

enthalten sind. Da nun $\varkappa$ positiv und gröfser als $\frac{1}{2}$ war, so ist die reelle positive Wurzel gröfser als $+a$ und die reelle negative Wurzel kleiner als $-a$; setzt man daher $\varkappa = \frac{1}{2} + \lambda$, wo λ ein ächter positiver Bruch ist, so wird

$$\varkappa^2 = \frac{1}{4} + \lambda + \lambda^2$$

also nach §. 2

$$\left.\begin{aligned} c^2 &= 2 - \lambda - \lambda^2 \\ c^2 - 2 &= -\lambda - \lambda^2 \\ 3 - c^2 &= 1 + \lambda + \lambda^2 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

und die reellen Wurzeln der Gleichung für die Geschwindigkeit sind

$$x = \pm a\sqrt{\frac{4+2\lambda}{2\lambda}} = \pm a\sqrt{\frac{2+\lambda}{\lambda}}$$

Es geht dann also der Punkt H von $x = 0$ mit der Geschwindigkeit $\frac{\sqrt{2-\lambda-\lambda^2}}{a}$ aus, geht über A, wo er mit unendlich grofser Geschwindigkeit ankommt, hinaus bis zum Punkt $x = +a\sqrt{\frac{2+\lambda}{\lambda}}$; dann kehrt er um, und kommt bei $x = 0$ mit der Geschwindigkeit $-\frac{\sqrt{2-\lambda-\lambda^2}}{a}$ an, erlangt bei B eine unendlich grofse Geschwindigkeit, die wieder abnimmt, bis er beim Punkte $x = -a\sqrt{\frac{2+\lambda}{\lambda}}$ zum zweiten Mal umkehrt, und so oscillirt er fortwährend zwischen den Punkten $+a\sqrt{\frac{2+\lambda}{\lambda}}$ und $-a\sqrt{\frac{2+\lambda}{\lambda}}$ hin und her.

Setzt man ferner die Werthe aus (1) in die Gleichung des §. 1 für $\frac{dx}{dt}$ ein, so ist

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{a^4(2-\lambda-\lambda^2)+2a^2x^2(1+\lambda+\lambda^2)-x^4(\lambda+\lambda^2)}{a(a^2-x^2)}}$$

also

$$t = \pm a\int\frac{(a^2-x^2)\,dx}{\sqrt{a^4(2-\lambda-\lambda^2)+2a^2x^2(1+\lambda+\lambda^2)-x^4(\lambda+\lambda^2)}}$$

und wenn man

$$\left.\begin{aligned} l &= a^4(2-\lambda-\lambda^2)\\ m &= a^2(1+\lambda+\lambda^2)\\ n &= \lambda+\lambda^2 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

setzt, wo nun l, m und n positive Gröfsen sind, so wird

$$t = \pm a\int\frac{(a^2-x^2)\,dx}{\sqrt{l+2mx^2-nx^4}}$$

also ist die Zeit von einem elliptischen Integral abhängig.

Es ist nun aber

$$l+2mx^2-nx^4 = \frac{1}{n}\left[ln+m^2-(m-nx^2)^2\right]$$

also, wenn man $\sqrt{ln + m^2} = \mu$ (3) setzt

$$l + 2mx^2 - nx^4 = \frac{1}{n}(\mu + m - nx^2)(\mu - m + nx^2)$$

Macht man nun die Substitution

$$nx^2 = (\mu + m)(1 - z^2)$$

also $$x = \sqrt{\frac{\mu + m}{n}}(1 - z^2)$$

$$\mu + m - nx^2 = (\mu + m) z^2$$

$$\mu - m + nx^2 = 2\mu - (\mu + m) z^2$$

$$dx = -\sqrt{\frac{\mu + m}{n(1 - z^2)}}\, z \,.\, dz$$

so wird

$$t = \pm a \int \frac{\left[a^2 - \frac{\mu + m}{n}(1 - z^2)\right] \cdot \left[-z dz \sqrt{\frac{\mu + m}{n(1 - z^2)}}\right]}{\sqrt{\frac{1}{n}(\mu + m) z^2 \,.\, \left[2\mu - (\mu + m) z^2\right]}}$$

$$= \mp \frac{a}{n\sqrt{2\mu}} \cdot \int \frac{[na^2 - \mu - m + (\mu + m) z^2]\, dz}{\sqrt{(1 - z^2)\left(1 - \frac{\mu + m}{2\mu} z^2\right)}}$$

Da nun aber $m < \mu$ ist, so ist $\frac{\mu + m}{2\mu} < 1$, setzt man also $\frac{\mu + m}{2\mu} = k^2$, ferner $\frac{a(m + \mu) - na^2}{n\sqrt{2\mu}} = h$ und $\frac{a(m + \mu)}{n\sqrt{2\mu}} = g$ so ist

$$t = \pm h \int \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} \mp g \int \frac{z^2\, dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}$$

Es sind nun noch die Grenzen festzustellen, zwischen denen z während der Bewegung des Punktes H bleibt. Die Variabele x liegt, wie wir oben gesehen, stets zwischen

$$+ a\sqrt{\frac{2 + \lambda}{\lambda}} \quad \text{und} \quad - a\sqrt{\frac{2 + \lambda}{\lambda}}$$

da nun aber

$$x^2 = \frac{\mu + m}{n} \,.\, (1 - z^2)$$

gesetzt war, so ist zufolge der Gleichungen (3) und (2)

$$\frac{\mu + m}{n} = \frac{\sqrt{ln + m^2}}{n} = \frac{a^2(2+\lambda)}{\lambda}$$

also $$1 - z^2 = \frac{\lambda x^2}{a^2(2+\lambda)}$$

also für beide Grenzwerthe $1 - z^2 = 1$ oder $z = 0$; es ist aber $z^2 = 1 - \frac{\lambda x^2}{a^2(2+\lambda)}$ also, da der Ausdruck $\frac{\lambda x^2}{a^2(2+\lambda)}$ nur positive Gröfsen enthält, $z^2 = 1$ ein Maximum für $x = 0$, so dafs z immer zwischen den Grenzen ± 1 bleibt. Man kann daher $z = \sin\varphi$ setzen, und dann wird

$$t = \pm h \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} \mp g \int \frac{\sin^2\varphi \, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}$$

Giebt man hier dem elliptischem Integral zweiter Gattung die Legendre'sche Normalform, so erhält man wegen der Identität

$$\int \frac{\sin^2\varphi \, . \, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} = \frac{1}{k^2} \cdot \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} - \frac{1}{k^2} \int d\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}$$

wenn man setzt $\frac{g}{k^2} - h = p$ und $\frac{g}{k^2} = q$

$$t = \mp p \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} \pm q \int d\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} \qquad (4)$$

Endlich wollen wir noch die Gröfsen k^2, p und q durch λ und a ausdrücken; dann wird nach einiger Rechnung

$$\left.\begin{aligned} k^2 &= \frac{(2+\lambda)(1+\lambda)}{2(1+2\lambda)}, \qquad p = \frac{a^2\sqrt{2}}{(1+\lambda)\sqrt{1+2\lambda}} \\ \text{und} \qquad q &= \frac{a^2 \, . \, \sqrt{2(1+2\lambda)}}{\lambda(1+\lambda)} \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

§. 6.

Ist $\varkappa^2 = \frac{9}{4}$, so ist $c^2 = 0$, also hat man für die Geschwindigkeit aus §. 1 die Gleichung

$$\frac{dx}{dt} = \pm \frac{x\sqrt{6a^2 - 2x^2}}{a(a^2 - x^2}$$

es ist also $\frac{dx}{dt} = 0$ für $x = 0$ und für $x = \pm a\sqrt{3}$; ferner

$$t = \pm \frac{a}{\sqrt{2}} \int \frac{a^2 - x^2}{x\sqrt{3a^2 + x^2}}\, dx \qquad (1)$$

Um diesen Ausdruck zu integriren, setzen wir $3a^2 - x^2 = y^2$, dann wird

$$t = \pm \frac{a}{\sqrt{2}} \int \frac{[(y^2 - 3a^2) + a^2]}{y^2 - 3a^2}\, dy$$

$$= \pm \frac{ay}{\sqrt{2}} \pm \frac{a^2}{2\sqrt{6}} \cdot l\left(\frac{y - a\sqrt{3}}{y + a\sqrt{3}}\right) + C$$

$$= \pm a\sqrt{\frac{3a^2 - x^2}{2}} \pm \frac{a^2}{2\sqrt{6}} \cdot l\left(\frac{\sqrt{3a^2 - x^2} - a\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 - x^2} + a\sqrt{3}}\right) + C \qquad (2)$$

Da nun für $x = 0$ auch die Geschwindigkeit gleich 0 wird, so mufs die Zeit von einem anderen Punkte, etwa von $x = b$ an gerechnet werden, dann ist t reell, so lange $b^2 < 3a^2$ ist, und es wird allgemein

$$t = a\left(\frac{\sqrt{3a^2 - x^2} - \sqrt{3a^2 - b^2}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$+ \frac{a^2}{2\sqrt{6}} \cdot l\left[\frac{\left(\sqrt{3a^2 - x^2} - a\sqrt{3}\right) \cdot \left(\sqrt{3a^2 - b^2} + a\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{3a^2 - x^2} + a\sqrt{3}\right) \cdot \left(\sqrt{3a^2 - b^2} - a\sqrt{3}\right)}\right]$$

Es geht also der Punkt H von b aus nach A hin, und kommt dort nach der Zeit

$$t_a = a^2 - a\sqrt{\frac{3a^2 - b^2}{2}}$$

$$+ \frac{a^2}{2\sqrt{6}} \cdot l\left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3a^2 - b^2} + a\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 - b^2} - a\sqrt{3}}\right)$$

an, dann geht er über A hinaus, bis beim Punkt $x = a\sqrt{3}$ seine Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt} = 0$ wird, und zwar geschieht dies nach der Zeit

$$t_r = -a\sqrt{\frac{3a^2 - b^2}{2}} + \frac{a^2}{2\sqrt{6}} \cdot l\left(\frac{a\sqrt{3} + \sqrt{3a^2 - b^2}}{a\sqrt{3} - \sqrt{3a^2 - b^2}}\right)$$

Nun kehrt H um, da aber dann dx negativ ist, so mufs

man in den Gleichungen (1) und (2) die unteren Zeichen nehmen, und aus der Gleichung (2) geht dann hervor, dafs H im Punkt $x = 0$ nach der Zeit $t = \infty$ ankommt; dort aber bleibt er nach §. 1 liegen, weil er von A und B gleich stark aber nach entgegengesetzter Richtung angezogen wird.

Sehr einfache Werthe erhalten die Formeln für die verschiedenen Zeiten, wenn man die Zeit vom Punkt $x = a$ an rechnet, wenn man also $b = a$ setzt; dann wird allgemein

$$t = a\left(\frac{\sqrt{3a^2 - x^2} - a\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) + \frac{a^3}{2\sqrt{6}} \cdot l\left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3a^2 - x^2} - a\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 - x^2} + a\sqrt{3}}\right)$$

ferner $t_a = 0$ und $t_r = 0{,}53251735 \,.\, a^2$.

§. 7.

Ist $x^2 > \frac{9}{4}$, so ist (nach §. 2) $c^2 = \frac{9}{4} - x^2$ negativ, also $\frac{c}{a}$ oder die Geschwindigkeit des Punktes H im Punkt $x = 0$ imaginär; es kann daher H nie an den Punkt $x = 0$ kommen, und defshalb wollen wir die Zeit von einem zwischen 0 und A liegenden Punkt $x = b$ rechnen, dessen Lage gleich noch näher bestimmt werden soll. Wir hatten nämlich im §. 2 gesehen, dafs für diesen Fall, wo $x^2 > \frac{9}{4}$ ist, alle Wurzeln der Function $f(x)$ unter dem Wurzelzeichen in der Gleichung §. 1 (1) reell sind, und zwar waren ihre Werthe $x_1 = \pm a\sqrt{\frac{-3 + 2x}{1 + 2x}}$ und $x_2 = \pm a\sqrt{\frac{3 + 2x}{2x - 1}}$; da nun aber $x > \frac{3}{2}$ ist, so ist absolut genommen x_1 stets kleiner als a und x_2 gröfser als a; setzen wir also $a\sqrt{\frac{-3 + 2x}{1 + 2x}} = b$, so ist die Geschwindigkeit 0 für $x = b$, also im Anfang der Bewegung, und hiernach wollen wir jetzt die Gleichung des §. 1 umformen. Es war aber

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{(a - x)^2} + \frac{1}{(a + x)^2} + C$$

soll also der Punkt H für $x = b$ die Geschwindigkeit 0 haben, so mufs $C = -\frac{2(a^2+b^2)}{(a^2-b^2)^2}$ sein, und es wird allgemein

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2[(a^2+x^2)(a^2-b^2)^2 - (a^2+b^2)(a-x^2)^2]}{(a^2-x^2)^2 \cdot (a^2-b^2)^2}$$

also ist

$$dt = \pm \frac{[a^2(a^2-b^2) - x^2(a^2-b^2)]\,dx}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{-3a^4b^2+a^2b^4+x^2(3a^4+b^4)-x^4(a^2+b^2)}}$$

Setzt man also $a^2 - b^2 = h$, $a^2 b^2 (3a^2 - b^2) = \alpha$, $3a^4 + b^4 = 2\beta$ und $a^2 + b^2 = \gamma$, so sind, da $b < a$ ist, alle diese Gröfsen positiv, und es ist

$$dt = \pm \frac{a^2 h - h x^2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{-\alpha + 2\beta x^2 - \gamma x^4}} \cdot dx \qquad (1)$$

Berechnen wir noch aus der Gleichung $a\sqrt{\frac{-3+2\varkappa}{1+2\varkappa}} = b$ die Gröfse $\varkappa$, so ergiebt sich $\varkappa = \frac{3a^2+b^2}{2(a^2-b^2)}$, und setzen wir diesen Werth ein in $x_2 = a\sqrt{\frac{3+2\varkappa}{2\varkappa-1}}$, so wird

$$x_2 = a\sqrt{\frac{3a^2-b^2}{a^2+b^2}}$$

und diesen Werth wollen wir der Abkürzung halber $= d$ setzen. Der Gang der Bewegung des Punktes H ist demnach folgender. Es bewegt sich H vom Punkt $x = b$ aus mit wachsender Geschwineigkeit auf A zu, weil er wegen der geringeren Entfernung von A stärker als von B angezogen wird; dann geht er über A hinaus, bis für $x = d$ seine Geschwindigkeit 0 wird. Nun kehrt er um, geht mit wachsender Geschwindigkeit auf A zu, dann nimmt seine Geschwindigkeit wieder ab, bis sie für $x = b$ verschwindet, und es oscillirt nun H fortwährend zwischen den Punkten $x = b$ und $x = d$, ohne jemals zum Punkt B zu kommen.

Die Zeit, in welcher H seine Bewegung vollführt, wird nach (1) durch das elliptische Integral

$$t = \pm\int \frac{(a^2 h - h x^2)\,dx}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{-\alpha + 2\beta x^2 - \gamma x^4}}$$

ausgedrückt, das nun noch auf die Normalform gebracht werden mufs.

Um zunächst die Coefficienten unter dem Wurzelzeichen positiv zu machen, setzen wir $x^2 = -y$, also $dx = -\frac{dy}{2\sqrt{-y}}$, dann wird

$$t = \mp \frac{a^2 \cdot h}{2\sqrt{2}} \cdot \int \frac{dy}{\sqrt{\alpha y + 2\beta y^2 + \gamma y^3}}$$

$$\mp \frac{p}{2\sqrt{2}} \int \frac{y\, dy}{\sqrt{\alpha y + 2\beta y^2 + \gamma y^3}}$$

Setzt man nun zur weiteren Reduction

$$\sqrt[4]{\frac{\gamma y^2}{\alpha}} = \frac{1 - \sqrt{1-z}}{\sqrt{z}}$$

so ergiebt sich

$$y = \sqrt[4]{\frac{\alpha}{\gamma}} \cdot \frac{(1-\sqrt{1-z})^2}{z}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{\sqrt[4]{\frac{\alpha}{\gamma}} \cdot (1-\sqrt{1-z})}{z\sqrt{z(1-z)}}$$

und

$$\sqrt{\alpha + 2\beta y + \gamma y^2} = \frac{2\sqrt{\alpha}(1-\sqrt{1-z})}{z} \cdot \sqrt{1 - \frac{\sqrt{\alpha\gamma} - \beta}{2\sqrt{\alpha\gamma}} \cdot z}$$

also wird

$$\frac{dy}{\sqrt{y(\alpha + 2\beta y + \gamma y^2)}} = \frac{1}{2\sqrt[4]{\alpha\gamma}} \cdot \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)\left(1 - \frac{\sqrt{\alpha\gamma} - \beta}{2\sqrt{\alpha\gamma}} \cdot z\right)}}$$

und setzt man

$$\psi(z) = z(1-z)\left(1 - \frac{\sqrt{\alpha\gamma} - \beta}{2\sqrt{\alpha\gamma}} \cdot z\right)$$

so erhält man

$$t = \mp \frac{a^2 h}{4\sqrt[4]{4\alpha\gamma}} \cdot \int \frac{dz}{\sqrt{\psi(z)}} \pm \frac{h}{4} \sqrt[4]{\frac{\alpha}{4\gamma^3}} \cdot \int \frac{dz}{\sqrt{\psi(z)}}$$

$$\mp \frac{h}{2}\sqrt[4]{\frac{\alpha}{4\gamma^3}}\cdot\int\frac{dz}{z\sqrt{\psi(z)}} \pm \frac{h}{2}\sqrt[4]{\frac{\alpha}{4\gamma^3}}\int\frac{dz\sqrt{1-z}}{z\sqrt{\psi(z)}}$$

$$= \frac{\mp h\left(a^2 - \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}\right)}{4\sqrt[4]{4\alpha\gamma}}\cdot\int\frac{dz}{\sqrt{\psi(z)}}$$

$$\mp \frac{h}{2}\sqrt[4]{\frac{\alpha}{4\gamma^3}}\cdot\int\frac{dz}{z\sqrt{\psi(z)}} \pm \frac{h}{2}\sqrt[4]{\frac{\alpha}{4\gamma^2}}\cdot\int\frac{dz\sqrt{1-z}}{z\sqrt{\psi(z)}}$$

Setzt man also

$$\frac{h\left(a^2 - \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}\right)}{4\sqrt[4]{4\alpha\gamma}} = m$$

$$\frac{h}{2}\sqrt[4]{\frac{\alpha}{4\gamma^2}} = n \quad \text{und} \quad \frac{\sqrt{\alpha\gamma}-\beta}{2\sqrt{\alpha\gamma}} = \delta$$

so ist

$$t = \mp m\cdot\int\frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-\delta z)}} \mp n\cdot\int\frac{dz}{z\sqrt{z(1-z)(1-\delta z)}}$$

$$\pm n\int\frac{dz}{z\sqrt{z(1-\delta z)}} = \mp m\,.\,u \mp n\,.\,v \pm n\,.\,w$$

Substituiren wir aber in δ die Werthe von α, β und γ, so wird $\delta = -\frac{(d-b)^2}{4bd}$, so dafs δ eine negative Zahl ist, und im Integral u setzen wir daher $z = 1 - \frac{1}{k^2 x_1^2}$, wo $k = \frac{d-b}{d+b}$ also < 1 ist, dann wird

$$dz = \frac{2\,dx_1}{k^2 x_1^3}; \quad 1 - \delta z = \frac{(d+b)^2}{4bd}\left(1 - \frac{1}{x_1^2}\right)$$

und

$$1 - z = \frac{1}{k^2 x_1^2}$$

also erhält man

$$m\,.\,u = \frac{4m\sqrt{bd}}{b+d}\cdot\int\frac{dx_1}{\sqrt{(1-x_1^2)(1-k^2x_1^2)}}$$

Drückt man den Werth des Coefficienten dieses Integrals durch a, b und d aus, so ist

$$\frac{4m\sqrt{bd}}{b+d} = \frac{a^2-b^2}{\sqrt{2(a^2+b^2)}} \cdot \frac{a^2-bd}{b+d}$$

setzt man also diesen Werth gleich p, so wird

$$mu = p\int \frac{dx_1}{\sqrt{(1-x_1^2)(1-k^2x_1^2)}}$$

Um das Integral v zu reduciren, setzt man $z = \frac{1}{\delta(1-x_2^2)}$, dann wird durch ähnliche Rechnungen wie oben

$$\mp n \cdot v = \pm \frac{(a^2-b^2)(d-b)^2}{2(d+b)\sqrt{2(a^2+b^2)}} \int \frac{(1-x_2^2)\,dx_2}{\sqrt{(1-x_2^2)(1-k^2x_2^2)}}$$

setzt man also

$$\frac{(a^2-b^2)(d-b)^2}{2(d+b)\sqrt{2(a^2+b^2)}} = q$$

so wird

$$\mp n \cdot v = \pm q\int \frac{dx_2}{\sqrt{(1-x_2^2)(1-k^2x_2^2)}}$$
$$\pm q\int \frac{x_2^2\,dx_2}{\sqrt{(1-x_2^2)(1-k^2x_2^2)}}$$

Das Integral w ist gar nicht elliptisch, denn setzt man $z = \frac{1}{\delta+s}$, so wird $w = -\int \frac{ds}{\sqrt{s}}$, also

$$w = -2\sqrt{s} = -\sqrt{\frac{4bd+(b-d)^2 \cdot z}{bd \cdot z}}$$

also

$$\pm n \cdot w = \mp \frac{a^2-b^2}{2} \cdot \sqrt{\frac{4bd+(b-d)^2 \cdot z}{2(a^2+b^2) \cdot z}}$$
$$= \mp \frac{a^2-b^2}{2} \cdot \sqrt{\frac{(d^2-x^2)(x^2-b^2)}{2(a^2+b^2) \cdot x^2}}$$

setzt man also

$$\frac{a^2-b^2}{2\sqrt{2(a^2+b^2)}} = r$$

so ist

$$\pm n \cdot w = \mp \frac{r}{x}\sqrt{(d^2-x^2)(x^2-b^2)} + C$$

wo die Constante C bei der numerischen Berechnung zu bestimmen ist.

Es ist nun noch zu untersuchen, zwischen welchen Grenzen die Variabeln x_1 und x_2 während der Bewegung des Punktes H bleiben. Die Grenzen von x waren, wie wir oben gesehen haben, $+b$ und $+d$, da nun $y = -x^2$ ist, so bleibt y stets innerhalb der Grenzen $-b^2$ und $-d^2$; dann war gesetzt

$$y = \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}\,\frac{(1-\sqrt{1-z})^2}{z} = bd\,.\,\frac{1-\sqrt{1-z}}{1+\sqrt{1-z}}$$

also ist $z = 1 - \left(\frac{bd-y}{bd+y}\right)^2$, also für $x = b$ wird

$$z = 1 - \left(\frac{b+d}{b-d}\right)^2 = 1 - \frac{1}{k^2}$$

und für $x = d$ wird $z = 1 - \left(\frac{b+d}{b-d}\right)^2 = 1 - \frac{1}{k^2}$.

Zur weiteren Reduction von u war dann $z = 1 - \frac{1}{k^2 x_1^2}$ gesetzt, also wird für beide Grenzen $x_1^2 = +1$ also $x_1 = \pm 1$. Es bleibt also x_1 immer innerhalb der Grenzen ± 1, so dafs wir $x_1 = \sin\varphi$ setzen können, und dann ist

$$\pm mu = \pm p \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}$$

Zur Reduction von v war $z = \frac{1}{\delta(1-x_2^2)}$ gesetzt, so dafs $x_2^2 = 1 - \frac{1}{\delta z}$ ist; es wird aber durch einfache Rechnung

$$\delta z = \frac{x^2 (d-b)^2}{(x^2 - bd)^2}$$

da nun x stets reelle, also x^2 stets positive Werthe hat, so ist δz stets positiv, also x_2 ein Maximum oder Minimum, jenachdem δz ein Maximum oder Minimum ist. Nun wird aber δz ein Maximum für $x^2 = bd$ oder für $x = \sqrt{bd}$, welchen Werth x auch einnehmen kann, also ist $x_2^2 = 1$ ein Maximum, und δz wird ein Minimum, also $\frac{1}{\delta z} = \frac{(x^2 - bd)^2}{x^2 (d-b)^2}$ ein Maximum, wenn $\frac{x^2 - bd}{x(d-b)} = \frac{x}{d-b} - \frac{bd}{x(d-b)}$ ein Maximum wird, also wenn $\frac{x}{d-b}$ möglichst grofs und $\frac{bd}{x(d-b)}$ möglichst klein ist, d. h. wenn x seinen gröfsten Werth, nämlich $x = d$ hat.

Ist dies nun der Fall, so erhält man $\frac{x^2 - bd}{x(d-b)} = 1$, also ist $x_2 = 0$ ein Minimum, so dafs x_2 stets innerhalb der Grenzen ± 1 bleibt, und man $x_2 = \sin\psi$ setzen kann; dann aber wird

$$\mp n \,.\, v = \pm q \int \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi}} \mp q \int \frac{\sin^2\psi \, d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi}}$$

Setzt man diese Werthe in den Ausdruck für t ein, so ist allgemein:

$$t = \mp p \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} \pm q \int \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi}}$$
$$\mp q \int \frac{\sin^2\psi \, d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi}} \pm rw + C$$

oder nach einer Rechnung wie in §. 5

$$t = \mp p \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} \mp \frac{q \,.\, k'^2}{k^2} \cdot \int \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi}}$$
$$\pm \frac{q}{k^2} \int d\psi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi} \mp rw + C$$

wo $k'^2 = 1 - k^2$ ist, und nach Obigem

$$rw = \frac{a^2 - b^2}{2\sqrt{2(a^2 + b^2)}} \cdot \frac{\sqrt{(d^2 - x^2)(x^2 - b^2)}}{x}$$

$$p = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{2(a^2 + b^2)}} \cdot \frac{a^2 - bd}{b + d}$$

$$q = \frac{a^2 - b^2}{2\sqrt{2(a^2 + b^2)}} \cdot \frac{(d-b)^2}{d + b}, \qquad d = a\sqrt{\frac{3a^2 - b^2}{a^2 + b^2}}$$

$$k^2 = \left(\frac{d-b}{d+b}\right)^2 \quad \text{und} \quad k'^2 = \frac{4bd}{(d+b)^2} \quad \text{ist.}$$

Numerische Berechnung.

§. 8.

Es soll schliefslich die Bewegung des Punktes H für die beiden Fälle, welche in §. 5 und §. 7 behandelt wurden, noch näher betrachtet werden, und hierzu ist die numerische Berechnung der dort vorkommenden elliptischen Integrale nöthig, welche nach den von Herrn Prof. Schellbach in seinem

Lehrbuch über elliptische Integrale angegebenen und zusammengestellten Methoden ausgeführt werden soll.

Im §. 5 hatten wir für die Zeit die Gleichung

$$t = \mp p \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} + q \cdot \int d\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}$$

gefunden, und wir wollen nun für die Constanten die bestimmten Werthe $a = \frac{1}{3}\sqrt{2}$ und $\lambda = \frac{2}{3}$ annehmen, dann wird $c = \frac{2}{3}\sqrt{2}$, also ist die Geschwindigkeit im Coordinaten-Anfangspunkt: $\frac{c}{a} = 2$ und die Abscisse des ersten Rückkehrpunktes $x = \frac{2}{3}\sqrt{2}$. Endlich erhält man für die Coefficienten die Werthe

$$k^2 = \tfrac{20}{21}, \qquad q = 0{,}432\,0494, \qquad p = 0{,}123\,4427$$

Zur Bestimmung des Winkels φ hat man die Gleichung $z^2 = 1 - \frac{\lambda x^2}{a^2 (2 + \lambda)}$, also für $x = 0$ ist $z = 1$ also $\varphi = \frac{\pi}{2}$, und für $x = a\sqrt{\frac{2+\lambda}{\lambda}}$ ist $z = 0$, also auch $\varphi = 0$; für $\varphi = 0$ verschwinden aber die elliptischen Integrale beider Gattungen, und daher wollen wir die Zeit vom Punkt $x = a\sqrt{\frac{2+\lambda}{\lambda}}$ an rechnen, da wir dann keine Integrations-Constante einzuführen brauchen. Unter dieser Voraussetzung gelangt der Punkt H zum Coordinaten-Anfangspunkt nach der Zeit

$$t_0 = -p \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} + q \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$$

so dafs wir die vollständigen Integrale beider Gattungen zu berechnen haben.

Zur Berechnung des Integrals erster Gattung wollen wir die von Gauſs angegebene Methode des geometrisch-arithmetischen Mittels anwenden, nach der man durch die Formeln

$1 = m$	$\cos \alpha = n$
$\frac{1}{2}(m + n) = m_1$	$\sqrt{m \cdot n} = n_1$
. . . . .	. . . . .
$\frac{1}{2}(m_{r-1} + n_{r-1}) = m_r$	$\sqrt{m_{r-1} \cdot n_{r-1}} = n_r$

eine Reihe von Gröfsen erhält, welche immer mehr einander gleich werden; setzt man dann $m_r = \mu$, so ist das vollständige Integral erster Gattung $K = \frac{\pi}{2\mu}$.

Für unsern Fall ist nun $k = \sqrt{\frac{20}{21}} = \sin\alpha$ also $\alpha = 77^0\ 23'\ 44'',73$, und man findet

$\log\cos\alpha = \log n = 0{,}338\ 8888 - 1$	$m = 1$
$\log n_1 = 0{,}669\ 4444 - 1$	$n = 0{,}218\ 2171$
$\log m_1 = 0{,}784\ 6947 - 1$	$m_1 = 0{,}609\ 1086$
$\log n_2 = 0{,}727\ 0696 - 1$	$n_1 = 0{,}467\ 1371$
$\log m_2 = 0{,}730\ 8814 - 1$	$m_2 = 0{,}538\ 1229$
$\log n_3 = 0{,}728\ 9755 - 1$	$n_2 = 0{,}533\ 4304$
$\log m_3 = 0{,}728\ 9839 - 1$	$m_3 = 0{,}535\ 7767$
$\log n_4 = 0{,}728\ 9797 = 1$	$n_3 = 0{,}535\ 7664$
	$m_4 = 0{,}535\ 7716$
	$n_4 = 0{,}535\ 7716$

also ist $\mu = 0{,}535\ 7716$ und $K = \frac{\pi}{2\mu} = 2{,}93184$, so dafs $p\,.\,K = 0{,}361\ 9142$ wird.

Zur Berechnung des vollständigen Integrals zweiter Gattung wollen wir die Formel

$$E\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\cos^4\frac{\beta}{2}\left(1 + 2\,\mathrm{tg}^4\frac{\beta}{2} - \tfrac{3}{4}\,\mathrm{tg}^8\frac{\beta}{2} + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{tg}^{12}\frac{\beta}{2} - \tfrac{23}{64}\,\mathrm{tg}^{16}\frac{\beta}{2} + \tfrac{3}{32}\,\mathrm{tg}^{20}\frac{\beta}{2} - \tfrac{59}{256}\,\mathrm{tg}^{24}\frac{\beta}{2} + \ldots\right)$$

anwenden, wo $\cos\beta = \sqrt{\cos\alpha} = \sqrt[4]{1-k^2}$ ist; dann ergiebt sich $\frac{\beta}{2} = 31^0\ 4'\ 32'',39$ und es wird

$2\,\mathrm{tg}^4\frac{\beta}{2} = 0{,}263\ 8261$	$\frac{3}{4}\,\mathrm{tg}^8\frac{\beta}{2} = 0{,}013\ 0508$
$\frac{1}{2}\,\mathrm{tg}^{12}\frac{\beta}{2} = 0{,}001\ 1472$	$\frac{23}{64}\,\mathrm{tg}^{16}\frac{\beta}{2} = 0{,}000\ 1088$
$\frac{3}{32}\,\mathrm{tg}^{20}\frac{\beta}{2} = 0{,}000\ 0037$	$\frac{59}{256}\,\mathrm{tg}^{24}\frac{\beta}{2} = 0{,}000\ 0012$
$0{,}264\ 9770$	$0{,}013\ 1608$

also ergiebt die Klammergröfse 1,251 8162,

und es wird $E\left(\frac{\pi}{2}\right) = E' = 1{,}058\ 139$

also $q \cdot E' = 0{,}457\,1681$
ferner war $p K = 0{,}361\,9142$
also ist $t_0 = 0{,}095\,2539$

Es ist nun klar, und könnte auch leicht gezeigt werden, dafs die Zeiten, in denen H die Strecken $A0$, $0B$, $B0$ etc. zurücklegt, einander gleich sind, so dafs H zum p^{ten} Male

zum Punkt A nach der Zeit $(p-1)\,4t_0$
- - $x = 0$ - - - $(2p-1)\cdot t_0$
- - B - - - $(2p-1)\cdot 2t_0$

gelangt.

§. 9.

In derselben Weise wollen wir nun auch die Berechnung der elliptischen Integrale im §. 7 ausführen; dort hatte sich als Gleichung für die Zeit ergeben:

$$t = \mp p\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \mp \frac{q k'^2}{k^2}\cdot\int \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$
$$\pm \frac{q}{k^2}\int d\psi \sqrt{1-k^2\sin^2\psi} \mp rw + C$$

und setzen wir nun $b = 2$ und $a = 3$, so wird $d = 3{,}990\,373$

$k = 0{,}332\,262$ $\quad$ $p = 0{,}166\,8445$
$k^2 = 0{,}110\,398$ $\quad$ $\frac{q}{k^2} = 2{,}937\,021$
$k'^2 = 0{,}889\,602$ $\quad$ $\frac{q k'^2}{k^2} = 2{,}612\,78$

Um nun zunächst die Constante C zu bestimmen, müssen wir die Gröfse von w, φ und ψ für $x = b$ kennen; es wird aber nach §. 7 $w = 0$ für $x = b$ und auch für $x = d$.

Ferner wird $x_1 = \frac{b d - x^2}{b d + x^2}\cdot\frac{d+b}{d-b}$, also $x_1 = 1$ für $x = b$, $x_1 = -0{,}1806\,529$ für $x = a$ und $x_1 = -1$ für $x = d$; setzt man also $x_1 = \sin\varphi$, so ergiebt sich

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \quad \text{für } x = b$$
$$\varphi = \pi + 10^0\,24'\,28'',05 \quad \text{für } x = a$$
$$\varphi = \frac{3\pi}{2} \quad \text{für } x = d$$

Endlich war

$$x_2^2 = 1 - \frac{(x^2 - bd)^2}{x^2(d-b)^2} = \frac{(d^2 - x^2)(x^2 - b^2)}{x^2(d-b)^2}$$

also wird

$$x_2 = 0 \quad \text{für } x = b$$
$$x_2 = 0{,}985\,3235 \quad \text{für } x = a$$
$$x_2 = 0 \quad \text{für } x = d$$

setzt man also $x_2 = \sin\psi$, so wird

$$\psi = 0 \quad \text{für } x = b$$
$$\psi = 80^0\,10'\,17''\,81 \quad \text{für } x = a$$
$$\psi = \pi \quad \text{für } x = d$$

Rechnen wir nun die Zeit vom Punkt $x = b$ an, so haben alle elliptischen Integrale die untere Grenze 0 mit Ausnahme von $-p\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$, dessen untere Grenze $\frac{\pi}{2}$ ist, wir müssen also die positive Constante $p\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$ hinzufügen, und können dann allen Integralen die untere Grenze 0 beilegen.

Die Berechnung des vollständigen Integrals erster Gattung wollen wir wieder nach der schon einmal benutzten Methode von Gaufs ausführen; setzt man dann $\sin\alpha = k$, so wird $\alpha = 19^0\,24'\,22'',07$, und man erhält:

$\log n = 0{,}974\,5978 - 1$	$m = 1$
$\log n_1 = 0{,}987\,2989 - 1$	$n = 0{,}943\,1870$
$\log m_1 = 0{,}987\,4846 - 1$	$m_1 = 0{,}971\,5935$
$\log n_2 = 0{,}987\,3918 - 1$	$n_1 = 0{,}971\,1782$
$\log m_2 = 0{,}987\,3918 - 1$	$m_2 = 0{,}971\,3859$

also ist $m_2 = \mu = 0{,}971\,3859$ und $K = \frac{\pi}{2\mu} = 1{,}617\,0675$, also $pK = C = 0{,}269\,7999$.

Man mufs nun, damit die Zeit positiv wird, für die erste Bewegung zwischen b und d die unteren Zeichen nehmen; will man also berechnen, wann der Punkt H bei A ankommt, so mufs man $x = a$ setzen, und dann ist

$$t_a = p\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} + \frac{qk'^2}{k^2} \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi}}$$

$$- \frac{q}{k^2}\int_0^{\psi} \left(d\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}\right) + r \,.\, w - C$$

wo $\varphi = \pi + 10^0\ 24'\ 28'',05$, $\psi = 80^0\ 10'\ 17'',81$ und $C = pK$ ist. Bezeichnet man also den Winkel $10^0\ 24'\ 28'',05$ mit φ', so ist

$$t_a = p\int_0^{\varphi'} \frac{d\varphi'}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi'}} + \frac{qk'^2}{k^2} \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi}}$$

$$- \frac{q}{k^2}\int_0^{\psi} \left(d\psi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi}\right) + rw + pK$$

Berechnen wir das unvollständige Integral erster Gattung wieder nach der Methode von Gaufs, so haben wir aus dem System von Gleichungen

$$\operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi') = \frac{n}{m} \,.\, \operatorname{tg}\varphi'$$

. . . . . .

$$\operatorname{tg}(\varphi_r - \varphi_{r-1}) = \frac{n_{r-1}}{m_{r-1}} \operatorname{tg}\varphi_{r-1}$$

neue Winkel φ zu bestimmen, bis zuletzt $u = \frac{\varphi_r}{2^r\,\mu}$ wird.

Hiernach findet man

$\log n = 0{,}974\,5978 - 1$	
$\log \operatorname{tg}\varphi' = 0{,}264\,0497 - 1$	
$\log \operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi') = 0{,}238\,6475 - 1$	$\varphi' = 10^0\ 24'\ 28'',05$
$\log n_1 = 0{,}987\,2989 - 1$	$\varphi_1 - \varphi' = 9^0\ 49'\ 42'',1$
$\log \operatorname{tg}\varphi_1 = 0{,}566\,6082 - 1$	$\varphi_1 = 20^0\ 14'\ 10'',15$
$\operatorname{dec}\log m_1 = 0{,}012\,5154$	$\varphi_2 - \varphi_1 = 20^0\ 13'\ 41'',52$
$\log \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = 0{,}566\,4225 - 1$	$\varphi_2 = 40^0\ 27'\ 51'',67$

also wird, da φ_2 sehr nahe gleich $2\varphi_1$ ist

$$u = \frac{\varphi_2}{2^2\mu} = \frac{\text{arc } 10^0\ 6'\ 57'',92}{\mu} = 0{,}181\,7599$$

und

$$pu = 0{,}030\,32565$$

Wenden wir dieselben Formeln auch zur Berechnung des zweiten unvollständigen Integrals erster Gattung an, so ist

$$\begin{array}{rl} \log n = 0{,}974\,5978 - 1 & \\ \log \operatorname{tg} \psi = 0{,}761\,3514 & \\ \hline \log \operatorname{tg} (\psi_1 - \psi) = 0{,}735\,9492 & \psi = 80^0\ 10'\ 17'',81 \\ \log n_1 = 0{,}987\,2989 - 1 & \psi_1 - \psi = 79^0\ 35'\ 31'',85 \\ \hline \log \operatorname{tg} \psi_1 = 0{,}566\,6085 - 1 & \psi_1 = 159^0\ 45'\ 49'',66 \\ \operatorname{dec} \log m_1 = 0{,}012\,5154 & \psi_2 - \psi_1 = 159^0\ 46'\ 18'',43 \\ \hline \log \operatorname{tg} (\psi_2 - \psi_1) = 0{,}566\,4228 - 1 & \psi_2 = 319^0\ 32'\ 8'',09 \end{array}$$

also $$v = \frac{\psi_2}{2^2 \mu} = \frac{\text{arc } 79^0\ 53'\ 2'',02}{\mu} = 1{,}435\,307$$

und $$\frac{q k'^2}{k^2} \cdot v = 3{,}750\,143$$

Zur Berechnung des unvollständigen Integrals zweiter Gattung benutzen wir, da $\alpha < 30^0$ ist, mit Vortheil die Formel

$$E(\psi) = \frac{\sin^2\beta \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right) \sin 2x}{\sqrt{8} \cdot \sin \delta} + x\left(\cos^4\frac{\beta}{2} + 2\sin^4\frac{\beta}{2}\right)$$

wo $k = \sin\alpha$, $\sqrt{\cos\alpha} = \cos\beta$, $\sin a \cdot \sin\psi = \sin\gamma$, $\frac{\cos\beta}{\cos\gamma} = \operatorname{tg}\delta$ und $\cos 2x = \operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right)$ ist. Es war aber

$$\alpha = 19^0\ 24'\ 22'',07 \quad \text{und} \quad \psi = 80^0\ 10'\ 17'',81$$

also findet man

$$\begin{array}{ll} \beta = 13^0\ 47'\ 22'',05 & \gamma = 19^0\ 6'\ 36'',59 \\ \delta = 45^0\ 47'\ 9'',64 & x = 79^0\ 53'\ 1'',58 \end{array}$$

Ferner $$\frac{\sin^2\beta \cdot \cos\left(\delta - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin 2x}{\sqrt{8} \cdot \sin \delta} = 0{,}009\,6931$$

und $$x\left(\cos^4\frac{\beta}{2} + 2\sin^4\frac{\beta}{2}\right) = 1{,}354\,9197$$

also $$E(\psi) = 1{,}364\,6128$$

und $$\frac{q}{k^2} \cdot E(\psi) = 4{,}007\,888$$

Endlich war

$$r \cdot w = \frac{a^2 - b^2}{2\sqrt{2(a^2 + b^2)}} \cdot \frac{\sqrt{(d^2 - x^2)(x^2 - b^2)}}{x}$$

also für $x = a$ und $d = a\sqrt{\frac{3a^2 - b^2}{a^2 + b^2}}$ wird $r \cdot w = \frac{(a^2 - b^2)^2}{2(a^2 + b^2)}$.

Setzt man nun $a = 3$ und $b = 2$ ein, so wird

$$r \cdot w = \frac{25}{24} = 0{,}961\,53846$$

Die positiven Glieder im Ausdruck für t_a sind also

$$p\,F(\varphi) = 0{,}030\,32565$$
$$\frac{q \cdot k'^2}{k^2} F(\psi) = 3{,}750\,143$$
$$r \cdot w = 0{,}961\,53846$$
$$C = pK = 0{,}269\,7999$$
$$5{,}011\,80701$$

und das negative $\frac{q}{k^2} E(\psi) = 4{,}007\,887$

$$t_a = 1{,}003\,91901$$

Dies ist also die Zeit, in der H zum Punkt A gelangt. Auf ganz ähnliche Weise würde man die Zeit für die Ankunft bei jedem beliebigen Punkte berechnen.

Vita.

Natus sum Bruno Theodorus Hülsen Milowiae a. h. s. quadragesimo secundo die XII mensis Martii patre Ferdinando pastore, quem jam ante XX annos mihi morte ereptum valde lugeo semperque lugebo, matre Augusta, e gente Seemann, quam adhuc superstitem pio gratoque animo veneror. Fidei addictus sum evangelicae.

Primis literarum elementis imbutus in schola privata urbis patriae, a. LIV Berolinum me contuli et per sex annos orphanotrophei Schindleriani inspectore Ill. Klaeden beneficiis fructus sum. Deinde gymnasium leucophaeum Berolinense adii, quod tunc auspiciis humanissimi Bellermann florebat, ibique examen abiturientium superavi. Inde testimonio maturitatis munitus a. LXIII tempore autumnali numero civium Almae Universitatis Fridericae-Guilelmae a Rectore Magnifico Beseler legitime adscriptus atque ab Ill. Müllenhoff, Amplissimi philosophorum Ordinis h. t. decano in album philosophorum relatus sum.

Per octo semestria disserentes audivi viros Ill. Cel. Exp. Arndt, Fuchs, Franz, Dove, Poggendorff, Foerster, du Bois-Reymond, Trendelenburg, Kummer, Weierstraſs, Paalzow, Kronecker, Quincke, Bona-Meyer, quibus omnibus optime de me meritis gratias debitas ago semperque habebo.

Studia mea interrupta sunt a. LXIV, quo anno stipendia feci, et iterum a. LXVI, quo belli temporibus in nonnullis castellis praesertim Luetzelburgo collocatus fui. Postquam exeunte anno LXVI denuo studiis operam navare coepi, examen pro facultate docendi mense Januario a. LXIX absolvi, et munus in schola, quae Berolini directore Ill. Gallenkamp floret, mense h. a. Aprili suscepi.

Denique etiam facere hoc loco non possum, quin avunculis meis Ferd. Seemann, J. c., et Th. Seemann, past., qui et consilio et beneficiis semper me adjuverunt atque summam benevolentiam in me contulerunt, gratias quam maximas absolvam.